| | |
|---|---|
| Title | Character sheaves on an exotic symmetric space (Combinatorial Representation Theory and Related Topics) |
| Author(s) | 庄司, 俊明 |
| Citation | 数理解析研究所講究録 (2013), 1870: 137-153 |
| Issue Date | 2013-12 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/195438 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

数理解析研究所講究録
第1870巻 2013年 137-153


# Character sheaves on an exotic symmetric space

名古屋大学大学院多元数理科学研究科・名誉教授　庄司　俊明
Toshiaki Shoji
Graduate School of Mathematics
Nagoya University

## 0. Introduction

1981年 Lusztig は Kostka 多項式が $GL_n$ の Lie 環のベキ零軌道に付随する交差 cohomology から得られる Poincaré 多項式として幾何的に実現できることを示した. この結果はそれ自身興味深いものであるが, それ以上に, 後に続く Lusztig の指標層の理論への端緒を開いたという意味で非常に重要である. Kostka 多項式 $K_{\lambda,\mu}$ は2つの分割の組 $\lambda, \mu$ を添え字集合として持つが, その拡張として2-分割の組 $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ を添え字集合として持つ Kostka 多項式 $K_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}$ が2004年筆者により導入された. この新しいタイプの Kostka 多項式に対してもある種の群作用を持つ多様体から得られる交差 cohomology による記述が可能であり, また従来の指標層の理論がそのような多様体に対しても拡張できることが近年分かって来た. ここではその一環として exotic symmetric space $\mathcal{X} = G/K \times V$ を考える. ただし $V$ を symplectic space として $G = GL(V), K = Sp(V)$ とおく. $\mathcal{X}$ の"ベキ単部分" $\mathcal{X}_{\mathrm{uni}}$ は有限個の $K$ 軌道を持つ. K. Sorlin との共同研究で, その $K$ 軌道から得られる交差 cohomology の Poincaré 多項式が Kostka 多項式 $K_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}$ の実現を与えるという結果が得られたので報告する. この結果自体は加藤周により別の方法で得られていたものであるが, 我々は $\mathcal{X}$ 上に指標層の理論を展開しその応用として Kostka 多項式の幾何的実現を与える. なお詳細については preprint [SS1], [SS2] を参照されたい.

以下では1-4節で歴史的背景を説明し, 5節以降で我々の結果について述べる.

## 1. Kostka 多項式の幾何的実現

Lusztig は以下に述べるように $GL_n$ のベキ零軌道を用いて Kostka 多項式の幾何的実現を与えた. $V$ を $\mathbf{C}$ 上の $n$ 次元ベクトル空間, $G = GL(V)$ とし, $\mathcal{N}$ を $V$ 上のベキ零変換の全体 (nilpotent cone) とする。$\mathcal{N}$ には $G$ が共役により作用し、よく知られているように、$\mathcal{N}$ のベキ零軌道の全体は $n$ の分割によりラベル付けされる; $\mathcal{P}_n$ を $n$ の分割全体の集合とし、$\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対応するベキ零軌道を $\mathcal{O}_\lambda$ とすれば、$\mathcal{O}_\lambda$ はその Jordan 標準形が $\lambda$ で与えられるようなベキ零変換の全体である.

$\mathcal{O}_\lambda$ の $\mathcal{N}$ における閉胞を $\overline{\mathcal{O}}_\lambda$ と表す。$\overline{\mathcal{O}}_\lambda$ はいくつかのベキ零軌道 $\mathcal{O}_\mu$ の和集合となり、$\mathcal{P}_n$ の半順序 $\mu \leq \lambda$ を用いて表される.

$$\overline{\mathcal{O}}_\lambda = \coprod_{\mu \le \lambda} \mathcal{O}_\mu.$$

ここに $\mu \le \lambda$ は $\mathcal{P}_n$ の支配的順序として知られている半順序で次のように定義される；$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k), \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathcal{P}_n$, $\lambda_k \ge 0, \mu_k \ge 0$, とするとき

$$\mu \le \lambda \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{i} \mu_j \le \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \quad (\text{各 } i \text{ に対して})$$

$K_{\lambda,\mu}(t) \in \mathbf{Z}[t]$ を $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ により定まる Kostka 多項式とする．Kostka 多項式は組み合わせ論でよく知られた重要な多項式であるが，表現論や，幾何的な方面ではそれを少し変形した変形 Kostka 多項式の方が相性がよい．

$$\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(t) = t^{n(\mu)} K_{\lambda,\mu}(t^{-1})$$

を変形 Kostka 多項式という．ただし $n(\mu) = \sum_i (i-1)\mu_i$ とおく．定義からは明らかでないが，$\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(t)$ は再び多項式になる．

$K = \mathrm{IC}(\overline{\mathcal{O}}_\lambda, \mathbf{C})$ を $\mathcal{O}_\lambda$ 上の定数層 $\mathbf{C}$ をその閉胞 $\overline{\mathcal{O}}_\lambda$ まで拡張して得られる交差 cohomology 複体とする．また $\mathcal{H}^i K$ をその $i$ 番目の cohomology 層，$\mathcal{H}^i_x K$ を $x \in \overline{\mathcal{O}}_\lambda$ におけるその茎とする．$\mathcal{H}^i_x K$ は $\mathbf{C}$ 上の有限次元ベクトル空間になる．

次が Lusztig の結果である．

**定理 1 (Lusztig [L1])**．$i$ が奇数のとき，$\mathcal{H}^i K = 0$ が成立する．さらに $x \in \mathcal{O}_\mu \subset \overline{\mathcal{O}}_\lambda$ に対して

$$\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(t) = t^{n(\mu)} \sum_{i \ge 0} (\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}^{2i}_x K) t^i.$$

この結果は組み合わせ論的に構成された Ksotka 多項式がベキ零軌道の幾何によって再構成されることを示している．それがすなわち Kostka 多項式の幾何的実現である．この結果の副産物として，Kostka 多項式の各係数は非負整数であるという Lasucoux-Schützenbeger の結果の鮮やかな別証明が得られる．

## 2. $GL(V)$ の指標層

$\mathbf{F}_q$ を $q$ 個の元からなる有限体、$\overline{\mathbf{F}}_q$ をその代数的閉胞とする．$V$ を $\overline{\mathbf{F}}_q$ 上の $n$ 次元ベクトル空間とし $G = GL(V) \simeq GL_n(\overline{\mathbf{F}}_q)$ とする．$F : G \to G$ を Frobenius 写像 $(g_i j) \mapsto (g_{ij}^q)$ とすると，$F$ の固定点のなす部分群 $G^F$ は $G(\mathbf{F}_q)$ に一致する．以前のように $\mathcal{N}$ を $G$ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の nilpotent cone とし，$G_{\mathrm{uni}}$ を $G$ のベキ単元全体のなす集合 (ベキ単多様体) とする．$G_{\mathrm{uni}}$ は $G$ の作用込みで $\mathcal{N}$ と同型であり，従って $G_{\mathrm{uni}}$ のベキ単共役類の集合は $\mathcal{N}$ のベキ零軌道の集合と自然に同一視できる．この状況におい

ても $\mathbf{C}$ 上の交差 cohomology を $l$-adic 交差 cohomology におきかえることにより, 定理 1.1 と同様にベキ単共役類による Kostka 多項式の幾何的実現が成立する.

一方, 有限一般線形群 $G^F = GL_n(\mathbf{F}_q)$ の $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 表現の既約指標（ここでは $l$-adic cohomology を扱かうために $\mathbf{C} \simeq \bar{\mathbf{Q}}_l$ で考える）は 1955 年 J.A. Green により完全に決定された. 特に $G^F$ の Borel 部分群による置換表現の分解に現れる既約指標は, $\mathcal{P}_n$ によりラベル付けされ, $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対応する既約指標を $\rho^\lambda$ とするとそのベキ単類 $c_\mu$ での値が変形 Kostka 多項式により記述される. すなわち

**定理 2 (Green).** $\rho^\lambda(c_\mu) = \widetilde{K}_{\lambda,\mu}(q)$.

ところで, 前出の Lusztig の結果（のベキ単類 version）により Kostka 多項式はベキ単類の閉胞に関する交差 cohomology により記述された. 従って $G^F$ のある種の既約指標のベキ単類での値が交差 cohomology によって幾何的に記述できたことになる. これが Lusztig の結果の表現論的な解釈であるが, 特殊な指標の特殊な値を考えるという意味では限定的な結果である. $G^F$ の任意の既約指標の任意の値は幾何的に記述できるだろうかという疑問が当然生じる. この疑問を肯定的に解決したのが Lusztig の指標層の理論である. そこでは $G^F$ の任意の既約指標に対して指標層と呼ばれるある種の $G$ 同変単純偏屈層が構成され, その既約指標のすべての値は付随する指標層によって幾何的に記述される. 前に出てきた交差 cohomology 複体は $G$ 同変単純偏屈層の一例になっている. Lusztig の指標層の理論は一般線形群 $GL(V)$ のみでなく, すべての簡約代数群に対して適用される理論であるが既約指標との関係は $GL(V)$ の場合以外はより間接的になる.

### 3. Enhancd nilpotent cone

Lusztig による Kostka 多項式の幾何的実現はすでに古典的な結果であるが, 近年それに関連して新しい展開が得られた. まず, Kostka 多項式の一般化について説明する. $r$ 個の分割の組 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ で $\sum_{i=1}^r |\lambda^{(i)}| = n$ をみたすものを $n$ の $r$-分割という. ただし $|\lambda^{(i)}|$ は分割 $\lambda^{(i)}$ のサイズを表す. $\mathcal{P}_{n,r}$ を $n$ の $r$分割全体の集合とする.

2004 年, 筆者は Kostka 多項式 $K_{\lambda,\mu}(t)$ の拡張として $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_{n,r}$ によって定まる Kostka 関数 $K_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ (apriori には $t$ の有理関数になる）を導入した ([S]). $K_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ は複素鏡映群 $G(r,1,n) = S_n \ltimes (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^n$ の指標により特徴付けられるので, $G(r,1,n)$ に付随した Kostka 関数という. $r=1$ の場合, すなわち対称群 $S_n$ に付随する Kostka 関数が本来の Kostka 多項式である. これらの Kostka 関数の構成は純粋に組み合わせ論的手法によるもので、$r=2$ の場合であっても symplectic 群や直交群とは直接関係しない.

しかし, それにもかかわらず 2008 年 Achar-Henderson により, $r=2$ の場合の $K_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ （この場合は多項式になることが分かっていた）の幾何的実現が得られた. 以下それについて説明する. 1 節と同じく $V = \mathbf{C}^n$, $\mathcal{N}$ を nilpotent cone とする. こ

ここで$\mathcal{N}\times V$をenhanced nilpotent coneという. $G=GL(V)$は自然に$\mathcal{N}\times V$に作用する. Achar-HendersonおよびTravkinにより独立に次が示された.

**(Achar-Henderson, Travkin)** enhanced nilpotent cone $\mathcal{N}\times V$の$G$軌道の全体と$\mathcal{P}_{n,2}$の間に自然な1:1対応が存在する.

この対応は次のように与えられる. $(x,v)\in\mathcal{N}\times V$を取る. $E^x=\{g\in\mathrm{End}(V)\mid gx=xg\}$とすると$E^xv$は$x$不変な$V$の部分空間になる. $x$の$E^xv$への制限のJordan typeを$\lambda^{(1)}$, $x$の$V/E^xv$への制限のJordan typeを$\lambda^{(2)}$とすると$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})\in\mathcal{P}_{n,2}$となる. $(x,v)$を含む$G$軌道を$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$と表すと$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}\leftrightarrow\boldsymbol{\lambda}$が求める対応を与える.

$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$の閉胞関係もAchar-Hendersonにより記述された. $\boldsymbol{\lambda}=(\mu,\nu)\in\mathcal{P}_{n,2}$, $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_k),\nu=(\nu_1,\dots,\nu_k)$とするとき$n$のcomposition $c(\boldsymbol{\lambda})$を

$$c(\boldsymbol{\lambda})=(\mu_1,\nu_1,\mu_2,\nu_2,\dots,\mu_k,\nu_k)$$

により定義する. そして$\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}_{n,2}$に対し, $\mathcal{P}_{n,2}$の半順序を$\boldsymbol{\mu}\le\boldsymbol{\lambda}\Leftrightarrow c(\boldsymbol{\mu})\le c(\boldsymbol{\lambda})$により定める. ここで右辺は$n$のcompositionに関する通常の支配的順序 (1節の定義と同じ) である. この記号のもとに$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$の閉胞関係は

$$\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\lambda}}=\coprod_{\boldsymbol{\mu}\le\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu}}$$

と表される. また$GL_n$のベキ零軌道の特徴は1点の固定化群が連結になることだが, $\mathcal{N}\times V$の$G$軌道についても同様に, 1点の固定化群が連結になることがAchar-Hendersonにより確かめられている.

ベキ零軌道の場合と同様に$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$の閉胞$\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\lambda}}$に付随する交差cohomology $\mathrm{IC}(\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\lambda}},\mathbf{C})$を考える. $\mathcal{P}_n$上の関数$n(\lambda)$に代わるものとして, ここでは$\mathcal{P}_{n,2}$上の関数$a(\boldsymbol{\lambda})$を

$$a(\boldsymbol{\lambda})=2n(\lambda^{(1)})+2n(\lambda^{(2)})+|\lambda^{(2)}|,\quad(\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})\in\mathcal{P}_{n,2})$$

により定義する. Achar-Hendersonによる次の結果は, 純粋に組み合わせ論的に構成され, 何ら代数群とのかかわりを持たない新種のKostka多項式が本質的に$GL_n$の幾何により実現されるという意味で非常に興味深い結果である.

**定理 3 (Achar-Henderson [AH], 2008).** $K=\mathrm{IC}(\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\lambda}},\mathbf{C})$とおく. $i$が奇数のとき$\mathcal{H}^iK=0$となる. $\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}_{n,2}$, $(x,v)\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu}}\subset\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\lambda}}$に対し

$$t^{a(\boldsymbol{\lambda})}\sum_{i\ge 0}(\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{H}^{2i}_{(x,v)}K)t^{2i}=\widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t).$$

定理1と比較して$t$の冪$t^i$が$t^{2i}$になっていることに注意する．同様の結果は$\mathbf{C}$を$\overline{\mathbf{F}}_q$でおきかえ$l$-adic cohomologyに移っても成立する．さらにenhanced nilpotent cone $\mathcal{N} \times V$ は$G_{\text{uni}} \times V$ に同型となり$G$の作用込みで$G_{\text{uni}} \times V$ は$G \times V$ に埋め込まれる．$G$多様体$G \times V$ は群ではないが$G$と似通った性質を持っている．そこでは$G_{\text{uni}} \times V$ が$G \times V$ のベキ単多様体の役割を果たすと考えられる(例えばどちらも$G$軌道の個数は有限)．そこで$G \times V$ に対しても$GL(V)$ の場合にならって指標層の理論を拡張することが考えられる．実際Finkelberg-Ginzburg-Travkin[FGT]は2008年, $G \times V$ 上のある種の$G$-同変単純偏屈層として指標層を定義し$G \times V$ 上の指標層の理論を展開した．(彼らはmirabolic character sheafと呼んでいる.) 彼らは指標層から自然に得られる関数が$(G \times V)^F$ 上の$G^F$-不変な関数全体のなすベクトル空間の基底になることを示した． $G^F = GL_n(\mathbf{F}_q)$ の場合, 指標層から得られる関数が$G^F$の既約指標を与えたのであるから, $G \times V$ の指標層から得られる関数は$(G \times V)^F$ の既約指標の役割を持つ良い関数であると考えられる．

**4. Symmetric space $GL_{2n}/Sp_{2n}$**

$\text{ch}\,\mathbf{F}_q \neq 2$ とする．$V$ を$\overline{\mathbf{F}}_q$ 上の$2n$次元ベクトル空間とし, $G = GL(V)$ とおく．$G$上のinvolution $\theta : G \to G$ を $\theta(g) = J^{-1}({}^tg^{-1})J$ により定義する．ただし$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ である．$K$ を$\theta$の固定点からなる$G$の部分群とすると$K \simeq Sp_{2n}(\overline{\mathbf{F}}_q)$ である．以下では$\overline{\mathbf{F}}_q$ 上の対称空間$G/K \simeq GL_{2n}/Sp_{2n}$ について考える．$G$のLie環を$\mathfrak{g}$とすると$\theta$は$\mathfrak{g}$上に位数2の線形変換を引き起こす．それを同じ記号で$\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$と表す．$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\theta \oplus \mathfrak{g}^{-\theta}$ と分解される．ただし$\mathfrak{g}^{\pm\theta} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \theta(x) = \pm x\}$ は$\theta$の固有空間である．ここで$\mathfrak{g}^{-\theta}$は対称空間$G/K$の点$K$での接空間に一致する．したがって$\mathfrak{g}^{-\theta}_{\text{nil}} = \mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathcal{N}_\mathfrak{g}$ ($\mathcal{N}_\mathfrak{g}$は$G$のnilpotent cone)が$G/K$のnilpotent coneの役割を果たすと考えられる．実際$\mathfrak{g}^{-\theta}_{\text{nil}}$ は$K$の作用で不変になり, $\mathfrak{g}^{-\theta}_{\text{nil}}$ の$K$軌道の全体は$\mathcal{P}_n$と自然に対応しそこに現れる$K$軌道の閉胞関係は$GL_n$の冪零軌道の場合と完全に一致することが知られている．$\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対応する$K$軌道を$\mathcal{O}_\lambda$と表す．この状況で以前と同じく$\mathcal{O}_\lambda$の閉胞$\overline{\mathcal{O}}_\lambda$に付随する交差cohomology $\text{IC}(\overline{\mathcal{O}}_\lambda, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ を考える．Hendersonは一部Bannai-Kawanaka-Songの結果([BKS])を援用して次を示した．

**定理 4 (Henderson [H], 2008)** $K = \text{IC}(\overline{\mathcal{O}}_\lambda, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ とおく．このとき$i \equiv 0 \pmod 4$の場合を除いて$\mathcal{H}^i K = 0$. また$x \in \mathcal{O}_\mu \subset \overline{\mathcal{O}}_\lambda$ に対して

$$t^{2n(\lambda)} \sum_{i \geq 0} (\dim \mathcal{H}^{4i}_x K) t^{2i} = \widetilde{K}_{\lambda,\mu}(t^2).$$

$K^F$の単位表現を$G^F$へ誘導して得られる表現$1_K^G$の自己準同型環$\text{End}_{G^F}(1_K^G)$ を組$(G^F, K^F)$ に関するHecke環といい$\mathcal{H}(G^F, K^F)$ と表す．Bannai-Kawanaka-Songは1990年$\mathcal{H}(G^F, K^F)$ の既約指標がGreenによる$GL_n(\mathbf{F}_q)$ の既約指標の理論と密接に関係していることを示し, その既約指標を完全に決定した．Greenの指標理論

の幾何的再構成が Lusztig による $GL_n$ の指標層の理論であり, その重要なステップが Kostka 多項式の幾何的実現であった. その意味で Henderson の結果は Bannai-Kawanaka-Song の指標理論の幾何的再構成へのステップと考えられる. しかし定理 4 は証明の一部で Bannai-Kawanaka-Song の結果を使っており, 幾何的再構成の立場からは不満が残る.

連結簡約群の指標層の拡張として対称空間の指標層が Ginzburg により導入されている. Grojnowski は MIT の博士論文 [G] で対称空間の指標層の理論を展開し, 特に $GL_{2n}/Sp_{2n}$ の場合を詳しく調べている. しかし正式な論文としては出版されていない.

**5. Exotic symmetric space $GL_{2n}/Sp_{2n} \times V$**

本節以降 K. Sorlin との共同研究で得られた著者達の結果について述べる. 前節までに $GL_n$ の nilpotent cone の幾何に関する 2 種類の拡張, ひとつは enhanced nilpotent cone, もうひとつは対称空間に対する nilpotent cone の類似, を見てきた. そしていずれの場合も Kostka 多項式が関係していた. そこで更なる拡張として $GL_{2n}/Sp_{2n} \times V$ ($V$ は symplectic space) を考えることが自然だと思われる. この場合 $GL_n$ の nilpotent cone の役割を果たすのは $\mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}^{-\theta} \times V$ であろう. 実は $\mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}^{-\theta} \times V$ は加藤によって導入され, その幾何的性質が詳しく調べられた exotic nilpotent cone に他ならない. そこで $GL_{2n}/Sp_{2n} \times V$ を exotic symmetric space と呼ぶことにする. 図式的に表せば次のようになる. $V_n$ を $n$ 次元ベクトル空間, $V_{2n}$ を $2n$ 次元ベクトル空間として

$$\begin{array}{ccc} GL_n & \longrightarrow & GL_{2n}/Sp_{2n} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ GL_n \times V_n & \longrightarrow & GL_{2n}/Sp_{2n} \times V_{2n} \end{array}$$

水平方向が対称空間への拡張, 垂直方向が enhanced nilpotent cone への拡張である. 関係する変形 Kostkata 多項式を比較してみると, $GL_n$ の場合は $\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(t)$ $(\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n)$ であり, $GL_{2n}/Sp_{2n}$ の場合は $\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(t^2)$ $(\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n)$, $GL_n \times V_n$ の場合は $\widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t^{1/2})$ $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_{n,2})$ となっている. 水平方向に対する変数の変化は $t \mapsto t^2$, 垂直方向に対する変化は $t \mapsto t^{1/2}$ であるから $GL_{2n}/Sp_{2n} \times V_{2n}$ に付随する変形 Kostka 多項式は $\widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_{n,2})$ となることが期待できる. 以下では実際それが成立することを示す.

ここで後の議論をやりやすくするために対称空間の扱いを少し変形する. 4 節の記号を踏襲して $G, K = G^\theta, V$ を考える. $\iota : G \to G$ を $x \mapsto x^{-1}$ で定義される半自己同型とし $G^{\iota\theta} = \{g \in G \mid \theta(g) = g^{-1}\}$ とおく. すると $G^{\iota\theta} = \{g\theta(g)^{-1} \mid g \in G\}$ が成立する. (一般の対称空間では右辺の集合は左辺の集合の連結成分のひとつになる.) このとき $G \to G, g \mapsto g\theta(g)^{-1}$ により同型 $G/K \xrightarrow{\sim} G^{\iota\theta}$ が導かれる. さらに $G^{\iota\theta}$ は

$K$ の共役の作用に関して不変であり, 上の同型により $G/K$ への $K$ の左作用が $G^{\iota\theta}$ への $K$ の共役による作用に対応する.

$G^{\iota\theta}_{\mathrm{uni}} = G^{\iota\theta} \cap G_{\mathrm{uni}}$ とおく. $G^{\iota\theta}_{\mathrm{uni}}$ は $K$ 不変な部分集合であり, $K$ の作用込みで $G^{\iota\theta}_{\mathrm{uni}} \simeq \mathfrak{g}^{-\theta}_{\mathrm{nil}}$ が成立する. 加藤により次が知られている.

**(Kato [Ka1])** Exotic nilpotent cone $\mathfrak{g}^{-\theta}_{\mathrm{nil}}$ の $K$ 軌道の全体は $\mathcal{P}_{n,2}$ と 1:1 に対応する.

従って $G^{\iota\theta}_{\mathrm{uni}}$ の $K$ 軌道の全体も $\mathcal{P}_{n,2}$ と 1:1 に対応する. $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対応する $K$ 軌道を $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ と表す. Achar-Henderson によりこの対応は次のように与えれることが分かっている. $(x, v) \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ とすると $(x, v) \in G_{\mathrm{uni}} \times V$ の $G$ 軌道は $\boldsymbol{\lambda} \cup \boldsymbol{\lambda}$ になる ($\boldsymbol{\lambda} \cup \boldsymbol{\lambda}$ は $\boldsymbol{\lambda} = (\mu, \nu)$ において分割 $\mu, \nu$ の各パーツの重複度を 2 倍にして得られる 2-分割). また $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の代表元として次のような $(x, v)$ が取れる; $v$ はある $x$ 不変な maximal isotropic subspace $M_n$ に含まれる. そこで $y = x|_{M_n}$ とおくと $(y, v) \in GL(M_n) \times M_n$ の $GL(M_n)$ 軌道の型は $\boldsymbol{\lambda}$ となる. また $G^{\iota\theta}_{\mathrm{uni}}$ の閉胞関係については次が知られている.

**(Achar-Henderson [AH])** $G^{\iota\theta}_{\mathrm{uni}}$ の $K$ 軌道の閉胞関係は 3 節で定義した $\mathcal{P}_{n,2}$ の半順序によって与えられる.

$\mathcal{X} = G^{\iota\theta} \times V$ とおく. $\mathcal{X}$ には自然に $\mathbf{F}_q$ 構造が入り, Frobenius 写像 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ が定義される. $GL(V) \times V$ に関する Finkelberg-Ginzburg-Travkin の結果を踏まえて次の問題を考える.

**問題**

- $\mathcal{X}$ 上の $K$ 同変単純偏屈層の良いクラス（すなわち $\mathcal{X}$ 上の指標層）を見つけること
- $\mathcal{X}$ 上の指標層を利用して $\mathcal{X}^F$ 上の $K^F$ 不変な関数全体のなすベクトル空間の良い基底（すなわち $\mathcal{X}^F$ の"既約指標"）を見つけること

## 6. $\mathcal{X}$ 上の指標層の構成

$T \subset B$ を $G$ の $\theta$ 不変な極大トーラスと Borel 部分群の組とする. $M_n$ を $B^\theta$ 不変な $V$ の maximal isotropic 部分空間とする. $\mathcal{X} = G^{\iota\theta} \times V$ である. ここで

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{X}} = \{(x, v, gB^\theta) \in G^{\iota\theta} \times V \times K/B^\theta \mid g^{-1}xg \in B^{\iota\theta}, g^{-1}v \in M_n\},\\
&\pi : \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}, (x, v, gB^\theta) \mapsto (x, v),\\
&\alpha : \widetilde{\mathcal{X}} \to T^{\iota\theta}, (x, v, gB^\theta) \mapsto p(g^{-1}xg)
\end{aligned}
$$

により多様体 $\widetilde{\mathcal{X}}$ および写像 $\pi, \alpha$ を定義する. ただし $p : B^{\iota\theta} \to T^{\iota\theta}$ は射影 $B \to T$ より導かれる写像を表す. 次の図式を考える.

$$T^{\iota\theta} \xleftarrow{\alpha} \widetilde{\mathcal{X}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}.$$

$\mathcal{E}$ を $T^{\iota\theta}$ 上の tame 局所系（すなわちある ch $\mathbf{F}_q$ と素な整数 $m$ に対して $\mathcal{E}^{\otimes m}$ が定数層 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ と同型になるような $T^{\iota\theta}$ 上の局所系）とする．$K_{T,\mathcal{E}} = \pi_*\alpha^*\mathcal{E}[\dim \mathcal{X}]$ により $\mathcal{X}$ 上の複体 ($\mathcal{X}$ 上の構成可能 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 層のなす bounded derived category $\mathcal{D}(\mathcal{X}, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ の元）を定義する．写像 $\pi$ は proper であるが, さらに semismall になることから $K_{T,\mathcal{E}}$ は $\mathcal{X}$ 上の半単純偏屈層になる．$K_{T,\mathcal{E}}$ はその定義から $K$ 同変な偏屈層であり、したがってその単純成分も $K$ 同変な偏屈層になる．

**定義：** 種々の組 $(T, \mathcal{E})$ から得られる $K_{T,\mathcal{E}}$ の単純成分に同型な $K$ 同変単純偏屈層を $\mathcal{X}$ 上の指標層という．$\mathcal{X}$ 上の指標層（の同型類）の集合を $\widehat{\mathcal{X}}$ と表す．

**注意.** 上記の指標層の定義は直接的であるが, 対称空間の場合の Ginzburg の定義にならってより概念的に $\mathcal{X}$ 上の指標層を定義することもできる．その枠組みの中では我々の定義した指標層は主系列表現に対応する部分集合になっている．しかし Ginzburg 流の定義と我々の定義が結局一致する (すなわち全ての指標層は主系列表現に対応する）ことが予想される．

**7. $K_{T,\mathcal{E}}$ の $\mathbf{F}_q$ 構造と Green 関数**

$(T, \mathcal{E})$ を前節の通りとする．ここでさらに $T$ は $F$ 不変な極大トーラス（ただし $B$ は必ずしも $F$ 不変とは仮定しない）とし, $\mathcal{E}$ は $F$ 不変な局所系, すなわち $F^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$ と仮定する． 同型 $\varphi_{\mathcal{E}}$ : $F^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ を, $\mathcal{E}$ の単位元 $e \in T^F$ での茎 $\mathcal{E}_e$ 上に誘導された写像 $\mathcal{E}_e \to \mathcal{E}_e$ が恒等写像になるように取る（この条件で $\varphi_{\mathcal{E}}$ は一意的に定まる). $\varphi_{\mathcal{E}} : F^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ より同型 $\varphi : F^*K_{T,\mathcal{E}} \xrightarrow{\sim} K_{T,\mathcal{E}}$ が導かれる．

一般に同型 $\varphi : F^*K \xrightarrow{\sim} K$ が与えられた代数多様体 $X$ 上の有界な複体 $K$ に対してその特性関数 $\chi_{K,\varphi} : X^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l$ を

$$\chi_{K,\varphi}(x) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(\varphi, \mathcal{H}^i_x K) \qquad (x \in X^F)$$

により定義する．$X$ に代数群 $H$ が作用していて, $K$ が $H$ 同変な偏屈層となる場合は, 得られた特性関数は $X^F$ 上の $H^F$ 不変な関数となる．

以上の事実を $K_{T,\mathcal{E}}$ に適用する．$K_{T,\mathcal{E}}$ は $\mathcal{X}$ 上の $K$ 同変偏屈層なのでその特性関数 $\chi_{K_{T,\mathcal{E}},\varphi}$ は $\mathcal{X}^F$ 上の $K^F$ 不変な関数を与える．以下では $\chi_{K_{T,\mathcal{E}},\varphi} = \chi_{T,\mathcal{E}}$ と表す．次が成立する．

**命題・定義：** $\mathcal{X}_{\mathrm{uni}} = G^{\iota\theta}_{\mathrm{uni}} \times V$ とおく．$\chi_{T,\mathcal{E}}$ の $\mathcal{X}^F_{\mathrm{uni}}$ への制限は $T^{\iota\theta}$ 上の局所系 $\mathcal{E}$ の取り方によらない．したがって $\mathcal{E}$ が定数層 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ の場合と一致する．各 $T$ に対して $Q_T : \mathcal{X}^F_{\mathrm{uni}} \to \bar{\mathbf{Q}}_l$ を $Q_T = \chi_{T,\mathcal{E}}|_{\mathcal{X}^F_{\mathrm{uni}}}$ により定義し $\mathcal{X}^F_{\mathrm{uni}}$ 上の Green 関数という．

ここで定義した $\mathcal{X}_{\mathrm{uni}}^F$ 上の Green 関数は Lusztig の指標層の理論 ([L2]) に現れる，簡約代数群 $G$ に対して定義される $G_{\mathrm{uni}}^F$ 上の Green 関数の類似物である．

**8. 指標公式**

簡約群の指標層の理論における重要な道具は Green 関数に関する指標公式 ([L2]) である．我々の場合にも同様の指標公式が成立する．$G$ の元の Jordan 分解 $x = su$ は $G^{\iota\theta}$ においても成立する．半単純元 $s \in G^{\iota\theta}$ に対して $Z_G(s)$ はいくつかの $\theta$ 不変な $GL$ の直積となり，$Z_G(s) \times V$ は $G^{\iota\theta} \times V$ と同種類の多様体の直積となる．そこで $\mathcal{X} = G^{\iota\theta} \times V$ の場合にならって $Z_G(s)^{\iota\theta} \times V$ 上の Green 関数 $Q_T^{Z_G(s)}$ が $Z_G(s)$ の $\theta$ 不変，$F$ 不変な極大トーラス $T$ に対して定義される．$\mathcal{E}$ を $T^{\iota\theta}$ 上の $F$ 不変な tame 局所系とする． $\chi_{\mathcal{E},\varphi_{\mathcal{E}}}$ を $\mathcal{E}$ の特性関数とすると $\chi_{\mathcal{E},\varphi_{\mathcal{E}}}$ は $T^{\iota\theta,F} = (T^{\iota\theta})^F$ 上の関数になる．$T$ は可換なので $T^{\iota\theta}$ は群になっていることに注意．$T^{\iota\theta}$ 上の $F$ 不変，tame 局所系は $\chi_{\mathcal{E},\varphi_{\mathcal{E}}}$ が有限群 $T^{\iota\theta,F}$ の既約指標（一次表現）を与えるものとして特徴付けられる．$T^{\iota\theta,F}$ の既約指標 $\vartheta$ に対応する tame 局所系を $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\vartheta$ と表す．

**定理 5 (指標公式).** $s, u \in (G^{\iota\theta})^F$ を $su = us$, $s$ : 半単純, $u$ : ベキ単，とする．$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\vartheta$ を $\vartheta \in (T^{\iota\theta,F})^\wedge$ で定まる $T^{\iota\theta}$ 上の $F$ 不変な tame 局所系とする．このとき

$$\chi_{T,\mathcal{E}}(su, v) = |Z_K(s)^F|^{-1} \sum_{\substack{x \in K^F \\ x^{-1}sx \in (T^{\iota\theta})^F}} Q_{xTx^{-1}}^{Z_G(s)}(u, v)\vartheta(x^{-1}sx)$$

簡約代数群の場合と同様に，この指標公式により関数 $\chi_{T,\mathcal{E}}$ の計算は種々の $GL_m$ に対して定義される $\mathcal{X}_{\mathrm{uni}}^F$ 上の Green 関数の計算に帰着される．

**9. 直交関係**

$\theta$ 不変な $G$ の極大トーラス $T, T'$ で $K$ 上共役なものに対し

$$N_K(T^\theta, T'^\theta) = \{n \in K \mid n^{-1}T^\theta n = T'^\theta\}$$
$$N_K(T^{\iota\theta}, T'^{\iota\theta}) = \{n \in K \mid n^{-1}T^{\iota\theta} n = T'^{\iota\theta}\}$$

とおく．$N_K(T^\theta, T'^\theta) \subset N_K(T^{\iota\theta}, T'^{\iota\theta})$ が成立する．また $T$ が $\theta$ 不変でかつ $\theta$ 不変な Borel 部分群に含まれ，$T'$ も同様ならば $T, T'$ は $K$ 上共役になることに注意する．このとき連結簡約群の場合の直交関係式 ([L2]) の類似として，次の関係式が成立する．

**定理 6 ($\chi_{T,\mathcal{E}}$ に対する直交関係).** $T, T'$ を上のように取り，$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\vartheta, \mathcal{E}' = \mathcal{E}_{\vartheta'}$ をそれぞれ $T^{\iota\theta}, T'^{\iota\theta}$ 上の tame 局所系とする．ただし $\vartheta \in (T^{\iota\theta,F})^\wedge$, $\vartheta' \in (T'^{\iota\theta,F})^\wedge$ である．

このとき

$$|K^F|^{-1}\sum_{(x,v)\in\mathcal{X}^F}\chi_{T,\mathcal{E}}(x,v)\chi_{T',\mathcal{E}'}(x,v)$$
$$=|T^{\theta,F}|^{-1}|T'^{\theta,F}|^{-1}\sum_{\substack{n\in N_K(T^\theta,T'^\theta)^F\\ t\in T^{\iota\theta,F}}}\vartheta(t)\vartheta'(n^{-1}tn)$$

**定理 7 (Green 関数に対する直交関係).**

$$|K^F|^{-1}\sum_{(u,v)\in\mathcal{X}^F_{\mathrm{uni}}}Q_T(u,v)Q_{T'}(u,v)=\frac{|N_K(T^\theta,T'^\theta)^F|}{|T^{\theta,F}||T'^{\theta,F}|}$$

定理 6, 定理 7 の証明は, 連結簡約群の場合と同様に定理 5 の指標公式を使って, 定理 6, 定理 7 を同時に証明する形でなされる.

## 10. 半単純偏屈層 $K_{T,\bar{\mathbf{Q}}_l}$ の分解と $W_n$ の作用

$\mathcal{E}$ が $T^{\iota\theta}$ 上の定数層 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ の場合を考える. このとき $K_{T,\mathcal{E}}=\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_l[\dim\mathcal{X}]$ である. $\{0\}=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_n$ を $B^\theta$ で不変になるような $V$ の isotropic flag とする. $0\le m\le n$ に対し $\mathcal{X}_m=\bigcup_{g\in K}g(B^{\iota\theta}\times M_m)$ とおく. $\mathcal{X}_m$ は $\mathcal{X}_n$ の閉集合になり $\mathcal{X}_n$ の閉集合による filtration $\mathcal{X}_0\subset\mathcal{X}_1\subset\cdots\subset\mathcal{X}_n=\mathcal{X}$ が得られる.

$W_n=N_K(T^\theta)/T^\theta$ を $K$ の Weyl 群とする. $W_n$ は $C_n$ 型 Weyl 群である. $W_n$ の既約指標の全体 $W_n^\wedge$ は $\mathcal{P}_{n,2}$ でラベル付けされる. $\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_{n,2}$ に対して標準的に構成される既約 $W_n$ 加群を $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ と表す. 次の結果が半単純偏屈層 $K_{T,\bar{\mathbf{Q}}_l}$ の単純成分への分解の具体的な表示を与える.

**命題 8.** $K_{T,\bar{\mathbf{Q}}_l}=\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_l[\dim\mathcal{X}]$ は $W_n$ 作用を持った半単純偏屈層となり次のように分解される.

$$\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_l[\dim\mathcal{X}]\simeq\bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_{n,2}}V_{\boldsymbol{\lambda}}\otimes\mathrm{IC}(\mathcal{X}_{m(\boldsymbol{\lambda})},\mathcal{L}_{\boldsymbol{\lambda}})[\dim\mathcal{X}_{m(\boldsymbol{\lambda})}]$$

ここで $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})$ に対して $m(\boldsymbol{\lambda})=|\lambda^{(1)}|$ と定義する. また $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\lambda}}$ は $\mathcal{X}_{m(\boldsymbol{\lambda})}$ のある smooth な開集合上で定義される単純局所系である.

**注意.** 命題 8 は簡約代数群の場合の同種の結果の類似だが, 大きな違いは簡約代数群の場合, 単純成分として現れる交差 cohomology の support が一定 (群自身になる) のに対し, この場合は support として全ての $\mathcal{X}_m$ が現れていることである。また Weyl 群の作用も簡約群の場合と異なり, Galois 被覆から直接得られるものではない.

以下では, 局所系 $\mathcal{L}_\lambda$ の定義とWeyl群の作用の入れ方についてより詳しく見ていく. そのために, 簡約群の場合と同様に $\mathcal{X}$ のsmoothな開集合上での $\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_l[\dim \mathcal{X}]$ の挙動を調べる.

$$
\begin{aligned}
T^{\iota\theta}_{\mathrm{reg}} &= \{t \in T^{\iota\theta} \mid Z_K(t) = Z_K(T^{\iota\theta}) \simeq SL_2 \times \cdots \times SL_2 \ (n \text{ 個の積 })\}, \\
G^{\iota\theta}_{\mathrm{reg}} &= \bigcup_{g \in K} g T^{\iota\theta}_{\mathrm{reg}} g^{-1}, \quad B^{\iota\theta}_{\mathrm{reg}} = G^{\iota\theta}_{\mathrm{reg}} \cap B, \\
\widetilde{\mathcal{Y}} &= \{(x, v, gB^\theta) \in G^{\iota\theta}_{\mathrm{reg}} \times V \times K/B^\theta \mid g^{-1}xg \in B^{\iota\theta}_{\mathrm{reg}}, g^{-1}v \in M_n\}, \\
\mathcal{Y}_m &= \bigcup_{g \in K} g(B^{\iota\theta}_{\mathrm{reg}} \times M_m) \quad \text{for } 0 \le m \le n.
\end{aligned}
$$

とおく. $\widetilde{\mathcal{Y}}$ は $\widetilde{\mathcal{X}}$ の open dense な部分集合になる. また $\mathcal{Y}$ は $\mathcal{X}$ の open dense な部分集合であって, $\mathcal{Y}_m$ は $\mathcal{Y}$ の閉集合となる. したがって閉集合による filtration $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{Y}_n = \mathcal{Y}$ が得られる.

各 $m$ に対して $\mathcal{Y}^0_m = \mathcal{Y}_m \setminus \mathcal{Y}_{m-1}$ とおく. 集合 $\{1, \ldots, n\}$ を $[1, n]$ と表わす. $I \subset [1, n]$ に対して $M_n$ の部分集合 $M^0_I$ を

$$
M^0_I = \{\sum_{i \in I} a_i e_i \in M_n \mid a_i \neq 0\}
$$

により定義する. ただし $\{e_1, \ldots, e_n\}$ は $T$ の weight vector からなる $M_n$ の基底である. $\widetilde{\mathcal{Y}}$ は次の様な構造を持つ.

$$
\widetilde{\mathcal{Y}} \simeq K \times^{B^\theta} (B^{\iota\theta}_{\mathrm{reg}} \times M_n) \simeq K \times^{B^\theta \cap Z_K(T^{\iota\theta})} (T^{\iota\theta}_{\mathrm{reg}} \times M_n)
$$

そこで $T^{\iota\theta}_{\mathrm{reg}} \times M^0_I$ は $B^\theta \cap Z_K(T^{\iota\theta})$ 不変であることに注意して $\widetilde{\mathcal{Y}}$ の部分集合 $\widetilde{\mathcal{Y}}^0_I$ を

$$
\widetilde{\mathcal{Y}}^0_I = K \times^{B^\theta \cap Z_K(T^{\iota\theta})} (T^{\iota\theta}_{\mathrm{reg}} \times M^0_I)
$$

により定義する. $\mathcal{W} = N_K(T^{\iota\theta})/Z_K(T^{\iota\theta})$ とすると $\mathcal{W} \simeq S_n$ は自然に $\widetilde{\mathcal{Y}}$ に作用する. $S_n$ の $[1, n]$ への作用に関する $[1, m]$ の固定化群は $S_m \times S_{n-m}$ である. 写像 $\pi$ の $\widetilde{\mathcal{Y}}$ への制限を $\psi : \widetilde{\mathcal{Y}} \to \mathcal{Y}$ とすると

$$
\psi^{-1}(\mathcal{Y}^0_m) = \coprod_{\substack{I \subset [1,n] \\ |I| = m}} \widetilde{\mathcal{Y}}^0_I = \coprod_{w \in S_n/(S_m \times S_{n-m})} w(\widetilde{\mathcal{Y}}^0_{[1,m]}) \tag{10.1}
$$

が成り立つ. ここで各 $\widetilde{\mathcal{Y}}^0_I$ が $\psi^{-1}(\mathcal{Y}^0_m)$ の連結成分を与える. 今 $\psi$ の $\psi^{-1}(\mathcal{Y}^0_m)$ への制限を $\psi_m$, $\widetilde{\mathcal{Y}}^0_I$ への制限を $\psi_I$ とすれば

$$(10.2) \qquad (\psi_m)_*\bar{\mathbf{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\substack{I\subset[1,n] \\ |I|=m}} (\psi_I)_*\bar{\mathbf{Q}}_l$$

と分解できる.

そこで一つの成分 $(\psi_I)_*\bar{\mathbf{Q}}_l$ に注目する. 以下では特に $I=[1,m]$ の場合を考える. さて $B^\theta \cap Z_K(T^{\iota\theta}) \simeq B_2 \times \cdots \times B_2$ ($n$ 個の直積) と表わされる. ただし $B_2$ は $SL_2$ の Borel 部分群である. 各 $m \le n$ に対して

$$Z_K(T^{\iota\theta})_m = \underbrace{B_2 \times \cdots \times B_2}_{m\ 個} \times \underbrace{SL_2 \times \cdots \times SL_2}_{(n-m)\ 個}$$

とおく. すると $\psi_{[1,m]}$ は次のように分解される.

$$\psi_{[1,m]} : \widetilde{\mathcal{Y}}^0_{[1,m]} \xrightarrow{\xi_m} \widehat{\mathcal{Y}}^0_{[1,m]} \xrightarrow{\eta_m} \mathcal{Y}^0_m$$

ここに $\widehat{\mathcal{Y}}^0_{[1,m]} = K \times^{Z_K(T)_m} (T^{\iota\theta}_{\mathrm{reg}} \times M^0_{[1,m]})$ である. 写像 $\xi_m, \eta_m$ は次の性質を持つ.

- $\xi_m$ : fibre が $(SL_2/B_2)^{n-m} \simeq \mathbf{P}_1^{n-m}$ に同型になるような locally trivial fibration,
- $\eta_m$ : 群 $S_m \times S_{n-m}$ を持つ有限 Galois 被覆

これらの性質から $(\psi_{[1,m]})_*\bar{\mathbf{Q}}_l$ が次のように分解される.

$$(10.3) \qquad (\psi_{[1,m]})_*\bar{\mathbf{Q}}_l \simeq H^\bullet(\mathbf{P}_1^{n-m}, \bar{\mathbf{Q}}_l) \otimes \bigoplus_{\rho\in(S_m\times S_{n-m})^\wedge} (\rho \otimes \mathcal{L}_\rho),$$

ただし $\mathcal{L}_\rho$ は Galois 被覆 $\eta_m$ で定まる $\mathcal{Y}^0_m$ 上の単純局所系である. ここで

- $\mathbf{P}_1^{n-m} \simeq (SL_2/B_2)^{n-m}$ は $(SL_2)^{n-m}$ の flag variety である.
- $(SL_2)^{n-m}$ の Weyl 群は $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{n-m}$ に同型になる.
- したがって $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{n-m}$ は $H^\bullet(\mathbf{P}_1^{n-m}, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ に Springer 表現として作用する.
- $\eta_m$ が Galois 被覆であることから $S_m \times S_{n-m}$ は $(\psi_{[1,m]})_*\bar{\mathbf{Q}}_l$ に作用する. そこで $(S_m \times S_{n-m}) \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ の $(\psi_{[1,m]})_*\bar{\mathbf{Q}}_l$ への作用が得られる. ただし $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ のうち $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m$ の部分の作用は自明なものとする.

ところで $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \in \mathcal{P}_{n,2}$ で $|\lambda^{(1)}| = m, |\lambda^{(2)}| = n-m$ とするとき既約 $W_n$ 加群 $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ は既約 $S_m \times S_{n-m}$ 加群 $\rho_{\boldsymbol{\lambda}}$ を $(S_m \times S_{n-m}) \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ 加群 $\widetilde{\rho}_{\boldsymbol{\lambda}}$ に拡大し $W_n$ へ

の誘導表現を取ることで得られることが知られている. そこで (10.1), (10.2), (10.3) より

$$(10.4) \qquad (\psi_m)_*\bar{\mathbf{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\rho_{\boldsymbol{\lambda}} \in (S_m \times S_{n-m})^\wedge} H^\bullet(\mathbf{P}_1^{n-m}) \otimes V_{\rho_{\boldsymbol{\lambda}}} \otimes \mathcal{L}_{\rho_{\boldsymbol{\lambda}}}$$

を得る. (10.4) を $\mathcal{Y}$ の filtration $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{Y}_n = \mathcal{Y}$ を通じて張り合わせることにより $\psi_*\bar{\mathbf{Q}}_l$ の分解が得られる. $\psi_*\bar{\mathbf{Q}}_l$ が $\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_l$ の $\mathcal{X}$ の open dense subset $\mathcal{Y}$ での挙動を表わしているわけであり, その DGM 拡大として命題 8 が得られる. ただし $\psi_*\bar{\mathbf{Q}}_l$ は $\mathcal{Y}$ 上の局所系ではないので $\psi_*\bar{\mathbf{Q}}_l$ から自動的に $\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_l$ が得られるわけではない.

## 11. Springer 対応

古典的な Springer 対応は Weyl 群の既約表現の同値類の集合と, 対応する簡約代数群のベキ単共役類上のある種の単純局所系との標準的な全単射を与えるものであった. 命題 8 から Springer 対応の類似が得られる.

**定理 9. (Springer 対応)**
$\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対して $\mathrm{IC}(\mathcal{X}_{m(\boldsymbol{\lambda})}, \mathcal{L}_{\boldsymbol{\lambda}})$ の $\mathcal{X}_{\mathrm{uni}}$ への制限は適当な次数シフトにより $\mathrm{IC}(\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ に一致する. したがって対応 $V_{\boldsymbol{\lambda}} \leftrightarrow \mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ により $W_n$ の既約指標の集合と $\mathcal{X}_{\mathrm{uni}}$ の $K$ 軌道の全体との間に標準的な 1:1 対応が得られる.

定理 9 は次のようにも言い換えられる. 写像 $\pi$ の $(x, v) \in \mathcal{X}_{\mathrm{uni}}$ での fibre $\pi^{-1}(x, v)$ は $K$ の旗多様体 $\mathcal{B} = K/B^\theta$ の閉部分集合を与える. これが古典的な Springer fibre に対応するものであり $\pi^{-1}(x, v) = \mathcal{B}_{(x,v)}$ と表わす. $\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_l$ が $W_n$ の作用を持つことから $H^i(\mathcal{B}_{(x,v)}, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ に $W_n$ 加群の構造が入る (Springer 表現の類似). $(x, v) \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の場合 $\dim \mathcal{B}_{(x,v)} = d_{\boldsymbol{\lambda}}$ とおく.

**系 10.** $(x, v) \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ に対し $H^{2d_{\boldsymbol{\lambda}}}(\mathcal{B}_{(x,v)}, \bar{\mathbf{Q}}_l) \simeq V_{\boldsymbol{\lambda}}$ が成立する.

**注意.**

(i) 定理 9 の Springer 対応は最初に, 加藤 [Ka1] により exotic nilpotent cone に対して, affine Hecke 環に関する Ginzburg 理論を援用して証明された. 加藤は次数付きベクトル空間 $H^\bullet(\mathcal{B}_{(x,v)}, \bar{\mathbf{Q}}_l) = \bigoplus_i H^i(\mathcal{B}_{(x,v)}, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ 上に $C_n$ 型 affine Hecke 環の作用を構成している. 本稿の結果は指標層の理論に基ずいた異なるアプローチである.

(ii) 定理の証明は 2 段階に分かれる. 第 1 段階で定理にあるように $\mathcal{X}$ 上の交差 cohomology を $\mathcal{X}_{\mathrm{uni}}$ へ制限することにより $W_n^\wedge$ と $\mathcal{X}_{\mathrm{uni}}/K$ との全単射が得られることを示す. 第 2 段階では Lusztig の Springer 表現に関する制限定理と

似たような定理を示し, それを利用して $W_n$ の Springer 表現の $W_{n-1}$ への制限を調べることにより全単射を具体的に決定する.

## 12. Green 関数と Springer 対応

Springer 対応を利用して Green 関数をさらに詳しく見ていく. $(T,B)$ を $F$ 不変かつ $\theta$ 不変な, 極大トーラスとそれを含む Borel 部分群の組とする. $H$ の Weyl 群 $N_G(T)/T$ は $S_{2n}$ に同型であり $K$ の Weyl 群 $N_K(T^\theta)/T^\theta$ が $W_n$ になる. よく知られているように $G$ の $F$ 不変な極大トーラス $T'$ は $w \in S_{2n}$ により $T' = T_w$ と表示される $(T = T_1)$. さらに $T'$ が $K$ 上 $T$ に共役ならば $w \in W_n \subset S_{2n}$ により $T' = T_w$ と表わされる.

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対して $A_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{IC}(\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\mathbf{Q}}_l)[\dim \mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}]$ とおく. Springer 対応により

$$K_{T,\bar{\mathbf{Q}}_l}|_{\mathcal{X}_{\mathrm{uni}}}[\dim \mathcal{X} - \dim \mathcal{X}_{\mathrm{uni}}] \simeq \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{n,2}} V_{\boldsymbol{\lambda}} \otimes A_{\boldsymbol{\lambda}}$$

と分解される. この分解によって $\varphi : K_{T,\bar{\mathbf{Q}}_l} \xrightarrow{\sim} K_{T,\bar{\mathbf{Q}}_l}$ より各 $\boldsymbol{\lambda}$ に対して同型 $\varphi_{\boldsymbol{\lambda}} : F^*A_{\boldsymbol{\lambda}} \xrightarrow{\sim} A_{\boldsymbol{\lambda}}$ が定まり

$$Q_{T_w} = (-1)^{\dim \mathcal{X} - \dim \mathcal{X}_{\mathrm{uni}}} \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{n,2}} \chi^{\boldsymbol{\lambda}}(w) \chi_{A_{\boldsymbol{\lambda}}, \varphi_{\boldsymbol{\lambda}}} \tag{12.1}$$

となる. ここに $\chi^{\boldsymbol{\lambda}}$ は $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ に対応する $W_n$ の既約指標である.

各 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対して

$$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\lambda}} = |W_n|^{-1} \sum_{w \in W_n} \chi^{\boldsymbol{\lambda}}(w) Q_{T_w} \tag{12.2}$$

と定義する. すると Green 関数の直交関係式は次のように書きかえられる.

**命題 11.** $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対し

$$|K^F|^{-1} \sum_{(u,v) \in \mathcal{X}^F_{\mathrm{uni}}} \mathcal{Q}_{\boldsymbol{\lambda}}(u,v) \mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mu}}(u,v) = |W_n|^{-1} \sum_{w \in W_n} |T_w^{\theta,F}|^{-1} \chi^{\boldsymbol{\lambda}}(w) \chi^{\boldsymbol{\mu}}(w).$$

(12.1) と (12.2) より $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\lambda}} = (-1)^{\dim \mathcal{X} - \dim \mathcal{X}_{\mathrm{uni}}} \chi_{A_{\boldsymbol{\lambda}}, \varphi_{\boldsymbol{\lambda}}}$ となる. 従って命題 11 は $A_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{IC}(\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ の特性関数 $\chi_{A_{\boldsymbol{\lambda}}, \varphi_{\boldsymbol{\lambda}}}$ に関する直交関係とみることができる.

## 13. Kostka 多項式の特徴付け

3節に述べた $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_{n,2}$ でラベル付けされた Kostka 多項式 $K_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ の特徴づけについて触れておく. $W_n$ の（既約とは限らない）指標 $\chi$ に対して

$$R(\chi) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(t^{2i}-1)}{|W_n|} \sum_{w \in W_n} \frac{\varepsilon(w)\chi(w)}{\det_{V_0}(t-w)}$$

とおく. $\varepsilon$ は $W_n$ の符号指標, $V_0$ は $W_n$ の鏡映表現である. $R(\chi)$ は $W_n$ に付随した余不変式環 $R(W_n)$ の次数付き重複度に一致し, したがって非負整数を係数とする $t$ の多項式になる. 行列 $\Omega = (\omega_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}})_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_{n,2}}$ を

$$\omega_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} = t^N R(\chi^{\boldsymbol{\lambda}} \otimes \chi^{\boldsymbol{\mu}} \otimes \varepsilon)$$

により定義する. $\mathcal{P}_{n,2}$ の半順序 $\boldsymbol{\mu} \leq \boldsymbol{\lambda}$ は3節に定義されたものとする.

**定理 12.** ([S]) $\Omega$ に対し関係式 $P\Lambda {}^tP = \Omega$ を満たし, かつ以下の条件を満たす $\mathbf{Q}[t]$ 係数の行列 $P = (p_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}), \Lambda = (\xi_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}})$ が唯ひとつ存在する ; $\Lambda$ は対角行列, $P$ は

$$p_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{\mu} \text{ 以外の場合}, \\ t^{a(\boldsymbol{\lambda})} & \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} \text{ の場合} \end{cases}$$

を満たす. このとき　$p_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} = \widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ となる.

**注意.** 上の状況のもとで次が成り立つ. 右辺は命題11の右辺と $|K^F|$ 倍を除いて一致することに注意.

$$\omega_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(q) = |K^F||W_n|^{-1} \sum_{w \in W_n} |T_w^{\theta,F}|^{-1} \chi^{\boldsymbol{\lambda}}(w)\chi^{\boldsymbol{\mu}}(w).$$

## 13. Achar-Henderson の予想

Exotic nilpotent cone に含まれる $K$ 軌道から得られる交差cohomology が Kostka 多項式 $\widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ の幾何的実現を与えるだろうということは Achar-Henderson([AH]) によってその具体形が予想されていた. 今までの議論からその予想が従う.

**定理 13.** $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ を $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対応する $\mathcal{X}_{\mathrm{uni}}$ の $K$ 軌道とし, $K = \mathrm{IC}(\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ とおく. このとき $(x,v) \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu}} \subset \overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\lambda}}$ に対して $i \equiv 0 \pmod 4$ でないとき $\mathcal{H}^i K = 0$. さらに

$$t^{a(\boldsymbol{\lambda})} \sum_{i \geq 0} (\dim \mathcal{H}^{4i}_{(x,v)} K) t^{2i} = \widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$$

となる.

実際 $K = A_{\boldsymbol{\lambda}}$ の特性関数 $\chi_{K,\varphi_{\boldsymbol{\lambda}}}$ を $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu}}^F$ 上の特性関数 $Y_{\boldsymbol{\mu}}$ ($z \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu}}^F$ ならば $Y_{\boldsymbol{\mu}}(z) = 1$, $z \notin \mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu}}^F$ なら $Y_{\boldsymbol{\mu}}(z) = 0$ で定義される $\mathcal{X}_{\mathrm{uni}}^F$ 上の関数) を使って

$$\chi_{K,\varphi_{\boldsymbol{\lambda}}} = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_{n,2}} p_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} Y_{\boldsymbol{\mu}}$$

と書き表わすことができる. すると 13 節の注意と命題 11 の $A_{\boldsymbol{\lambda}}$ の特性関数の直交関係式より, $P = (p_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}})$ が定理 12 の関係式をみたし, 従って $p_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} = \widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(q)$ となることが分かる. すなわち $\chi_{K,\varphi_{\boldsymbol{\lambda}}}$ の $(x, v) \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu}}^F$ での値が $\widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(q)$ に一致する. さらに $K$ の特性関数が定理の形に表わされることは $K$ の purity, すなわち $\mathcal{H}^i K$ への Frobenius 写像の固有値の絶対値が $q^{i/2}$ を示すことによって導かれる.

**注意.**

(i) 上記定理の結果は, 最初に加藤 [Ka2] によって別の方法で証明された. 実際 Achar-Henderson は予想を述べたあとでその証明へのアプローチとして 2 通りの可能性を示唆している. 加藤の証明はその第一の方法, すなわち次数付き Springer 加群 $H^\bullet(\mathcal{B}_{(x,v)}, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ の De Concini-Procesi 型の記述を決定するものであり, 我々の議論はその第二の方法, すなわち Green 関数の直交関係を利用するものである.

(ii) 同様の議論によって対称空間の場合の Kostka 関数に関する Henderson の結果 (定理 4) を (再) 証明することができる. 我々の議論では BKS の結果を使う必要はないので幾何的により純粋な証明を与える.

## 14. $\mathcal{X}^F$ 上の $K^F$ 不変関数

最後に $\mathcal{X}$ 上の指標層が $\mathcal{X}^F$ 上の $K^F$ 不変関数の意味のあるクラスを生み出すことを見よう. 6 節のように $\widehat{\mathcal{X}}$ を $\mathcal{X}$ 上の指標層全体の集合とする. $\widehat{\mathcal{X}}^F = \{A \in \widehat{\mathcal{X}} \mid F^*A \simeq A\}$ を $F$ 不変な指標層の全体とする. 各 $A \in \widehat{\mathcal{X}}^F$ に対し $\varphi_A : F^*A \xrightarrow{\sim} A$ を固定し (このような $\varphi_A$ はスカラー倍を除いて一意的に定まる) その特性関数 $\chi_{A,\varphi_A}$ を考える. ここで $\mathcal{C}_q(\mathcal{X})$ を $\mathcal{X}^F$ 上の $K^F$ 不変な $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 関数のなす $\bar{\mathbf{Q}}_l$ ベクトル空間とする. 次が成立する.

**定理 14.**

(i) 各 $A \in \widehat{\mathcal{X}}^F$ に対し特性関数 $\chi_{A,\varphi_A}$ を計算するアルゴリズムが存在する.

(ii) 集合 $\{\chi_{A,\varphi_A} \mid A \in \widehat{\mathcal{X}}^F\}$ は $\mathcal{C}_q(\mathcal{X})$ の基底を与える.

実際 $\chi_{A,\varphi_A}$ の計算は $\chi_{T,\mathcal{E}}$ の計算に帰着し, $\chi_{T,\mathcal{E}}$ の計算は指標公式により Green 関数の計算に帰着する. 定理 13 により Green 関数は Kostka 関数を通じて計算されるので (i) が従う. (ii) については $\chi_{T,\mathcal{E}}$ の直交関係を使って $\chi_{A,\varphi_A}$ 達の内積を計算する. 簡約群の指標層の場合と違って我々の指標層の特性関数は必ずしも直交しない. し

かしその一次独立性を示すに足る関係式は得られるのである．そして $\mathcal{X}^F$ の $K^F$ 軌道の個数を勘定することにより (ii) が得られる．

## References


[AH] P. Achar and A. Henderson; Orbit closures in the enhanced nilpotent cone, Adv. in Math. **219** (2008), 27-62, Corrigendum, **228** (2011), 2984-2988.

[BKS] E. Bannai, N. Kawanaka and S.-Y. Song; The character table of the Hecke algebra $\mathcal{H}(GL_{2n}(\mathbf{F}_q), Sp_{2n}(\mathbf{F}_q))$, J. Algebra, **129** (1990), 320–366.

[FGT] M. Finkelberg, V. Ginzburg and R. Travkin; Mirabolic affine Grassmanian and character sheaves, Selecta Math. (N.S.) **14** (2009), 607-628.

[G] I. Grojnowski; Character sheaves on symmetric spaces, Ph.D. Thesis MIT 1992,

[H] A. Henderson; Fourier transform, parabolic induction, and nilpotent orbits, Transformation groups, **6**, (2001), 353-370.

[Ka1] S. Kato; An exotic Deligne-Langlands correspondence for sympectic groups, Duke Math. J. **148** (2009), 306-371.

[Ka2] S. Kato; An algebraic study of extension algebras, preprint. arXiv:1207.4640

[L1] G. Lusztig; Green polynomials and singularities of unipotent classes, Adv. in Math. **42** (1981), 169-178.

[L2] G. Lusztig; Character sheaves, II, Adv. in Math., **57** (1985), 226-265.

[S] T.Shoji; Green functions attached to limit symbols, Representation theory of algebraic groups and quantum groups, Adv. Stu. Pure Math. vol. **40**, Math. Soc. Japan, Tokyo 2004, 443-467.

[SS1] T. Shoji and K. Sorlin; Exotic symmetric space over a finite field, I, preprint. arXiv:1207.5093

[SS2] T. Shoji and K. Sorlin; Exotic symmetric space over a finite field, II, preprint. arXiv:1212.5861